

DEITURAK..... IZENA..... N.A.N.....

TITULAZIOA..... TALDEA..... DATA.....

KALIFIKAZIOA

--	--	--	--	--	--

1. (a) i. R, S eta T multzoak E bektore-espazioaren azpiespazioak badira, frogatu $R \cap S \cap T$ ere azpiespazioa dela.
 ii. Frogatu $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ sistema askea bada, sistema horren konbinazio lineala den bektoreak adierazpide bakarria duela.

(b) Izan bitez $\mathbb{R}^4$ -ko ondorengo bi azpiespazio:

$$S = L(\{(1, 0, 0, 0), (2, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0)\}); T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z = 0; z + t = 0\}$$

- i. $S, T, S + T$ eta $S \cap T$ -ren oinarriak eta dimentsioak kalkulatu.
- ii. S -ren oinarria hedatuz, $\mathbb{R}^4$ -ko oinarria lortu.
- iii. Kalkulatu $(2, 1, 0, 0)$ bektorearen koordenatuak aurreko atalean lortutako oinarriarekiko.

2. (a) $f : E \longrightarrow F$ aplikazio linealerako frogatu:

- i. $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ bektore familia E -ren sistema sortzailea bada, orduan $\{f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), \dots, f(\bar{u}_n)\}$ $Im f$ irudi azpiespazioaren sistema sortzailea da.
- ii. $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ sistema askea bada eta f injektiboa bada, orduan $\{f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), \dots, f(\bar{u}_n)\}$ sistema askea da.

(b) Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ondorengo eran definitutako aplikazio lineala:

$$f(1, 1, 0) = (2, 0, 1); f(0, 2, -1) = (0, 2, -3); f(1, 2, 0) = (3, -1, 3)$$

- i. f -ren adierazpena oinarri kanonikoetan eman.
- ii. $Ker f$ eta $Im f$ kalkulatu, beraien oinarriak eta dimentsioak eman.
- iii. Aplikazioa sailkatu.

3. (a) Izan bedi A ondorengo betetzen duen matrize karratua:

$$(I + A + A^2 + A^3)(I - A) = 0$$

- i. Garatu matrize ekuazio hori eta lortu A^4 .
- ii. Zeintzuk dira A, A^2 eta A^3 matrizeen alderantzizko matrizeak?

(b) Ondorengo matrizea emanik, a -ren zein baliotarako existitzen da alderantzizkoa? Posible bada, kalkulatu A matrizearen alderantzizkoa $a = 0$ denean.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -a & 5 & -1 \\ -6 & a & -2 \end{pmatrix}$$

4. (a) Frogatu E bektore-espazioaren oinarri-aldaketa eginez, $f : E \longrightarrow E$ endomorfismoari elkartutako matrizearen polinomio karakteristikoa ez dela aldatzen.

(b) Lortu $a \in \mathbb{R}$ parametroaren balioak A matrizea diagonalgarria izan dadin.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & a & 8 \\ 2 & 8 & a \end{pmatrix}$$

APELLIDOS..... NOMBRE..... D.N.I.....

TITULACION..... GRUPO..... FECHA.....

CALIFICACION

--	--	--	--	--	--

1. (a) i. Si R, S y T son subespacios de un espacio vectorial E , demuestra que $R \cap S \cap T$ también es subespacio vectorial.
- ii. Demuestra que si $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ es un sistema libre, un vector que sea combinación lineal de esos vectores se expresa de forma única.

(b) Sean los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S = L(\{(1, 0, 0, 0), (2, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0)\}); \quad T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z = 0; \quad z + t = 0\}$$

- i. Calcula bases y dimensiones de $S, T, S + T$ y $S \cap T$.
 - ii. Amplía la base de S para obtener una base de $\mathbb{R}^4$.
 - iii. Calcula las coordenadas del vector $(2, 1, 0, 0)$ respecto de la base obtenida en el apartado anterior.
2. (a) Demostrar para la aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$:
 - i. Si $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ es sistema generador de E , entonces $\{f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), \dots, f(\bar{u}_n)\}$ es sistema generador del subespacio imagen $Im f$.
 - ii. Si $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ es sistema libre y f es inyectiva, entonces también $\{f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), \dots, f(\bar{u}_n)\}$ es libre.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida del modo siguiente:

$$f(1, 1, 0) = (2, 0, 1); \quad f(0, 2, -1) = (0, 2, -3); \quad f(1, 2, 0) = (3, -1, 3)$$

- i. Obtén la expresión de f en la base canónica.
 - ii. Calcula $Ker f$ e $Im f$ y halla sus bases y dimensiones.
 - iii. Clasifica la aplicación.
3. (a) Sea A una matriz cuadrada que cumple la siguiente ecuación:

$$(I + A + A^2 + A^3)(I - A) = 0$$

- i. Desarrolla esta ecuación para obtener A^4 .
 - ii. ¿Cuáles son las matrices inversas de A, A^2 y A^3 ?
- (b) Dada la siguiente matriz, ¿para qué valor de a existe la inversa? Si es posible, calcula la inversa de A cuando $a = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -a & 5 & -1 \\ -6 & a & -2 \end{pmatrix}$$

- (a) Demuestra que haciendo un cambio de base en el espacio vectorial E , el polinomio característico de la matriz asociada al endomorfismo $f : E \longrightarrow E$ no varía.
- (b) Calcula los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la matriz A sea diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & a & 8 \\ 2 & 8 & a \end{pmatrix}$$