

DEITURAK..... IZENA..... N.A.N.....

TITULAZIOA..... TALDEA..... DATA.....

KALIFIKAZIOA

--	--	--	--	--	--

1. (a) i. Frogatu E bektore-espazioaren S eta T azpiespazioen sistema sortzaileak $G_S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ eta $G_T = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$ badira, orduan $G_S \cup G_T$ bektore familia $S + T$ azpiespazioaren sistema sortzailea dela.

 ii. Izan bitez S eta T , $\mathbb{R}^{10}$ -ren azpiespazio bektorialak non $\dim(S) = 2$ eta $\dim(T) = 7$ diren. Kalkulatu $S \cap T$ eta $S + T$ azpiespazioek izan ditzaketen dimentsio posibleak.

- (b) $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ 2. ordenako matrize errealeen bektore-espazioan ondorengo multzoak definitzen dira:

$$U = \{A \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid A \text{ simetrikoa}\} \text{ eta } V = \{B \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid B \text{ antisimetrikoa}\}$$

- i. U eta V azpiespazio bektorialak direla frogatu.

 ii. $U, V, U + V$ eta $U \cap V$ -ren oinarriak eta dimentsioak kalkulatu.

 iii. Kalkulatu $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen koordinatuak lortutako $U + V$ -ren oinarriarekiko.
2. (a) Frogatu $f : V \longrightarrow V'$ aplikazio lineala injektiboa dela baldin, eta soilik baldin, $\ker(f) = \{\bar{0}\}$ bada.

 (b) Izan bedi $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ $\mathbb{R}^4$ -ren oinarri bat. Kontsidera dezagun $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ondorengo propietateak betetzen dituen aplikazio lineala:

$$f(\bar{e}_1) = (0, 1, 2); f(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = (0, -1, 0); f(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3) = (-2, -2, 0)$$

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z, t) \mid x = z = 0; y - z - t = 0\}$$

- i. Kalkulatu f -ri dagokion matrizea.

 ii. Kalkulatu $\text{Im } f$ eta $\ker f$ -ren oinarriak eta dimentsioak.

 iii. f aplikazioa sailkatu.
3. (a) Izan bitez $\bar{u}$ eta $\bar{v}$ V bektore-espazio euklidearraren bi bektore. Frogatu:

 i. $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

 ii. $\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 \iff \bar{u}$ eta $\bar{v}$ bektoreak ortogonalak badira.

 (b) $\mathbb{R}^3$ bektore-espazio euklidearrean honako biderketa eskalar hau definitzen da:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_3$$

- i. Biderketa eskalar hau erabiliz, lortu $S = \{(x, y, z) \mid -2x + 2y - z = 0\}$ azpiespazioaren oinarri ortonormal bat.

 ii. Aurreko atalean kalkulaturako oinarria osatu $\mathbb{R}^3$ -ren oinarri ortonormal bat lortzeko.
4. (a) i. Izan bedi $f : E \longrightarrow E$ endomorfismoa. Frogatu λ autobalioari elkartutako autobektorek $\bar{0}$ bektorearekin osatutako multzoa, $S = \{\bar{x} \in E - \{\bar{0}\} \mid f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}\} \cup \{\bar{0}\}$, azpiespazioa dela.

 ii. $\bar{x}$ bektorea A matrizearen λ autobalioari elkartutako autobektorea bada, orduan A^2 eta A^3 matrizeen autobektorea ere dela frogatu. Kasu bakoitzean esan zein den dagokion autobalioa.

 (b) Ondorengo matrizearen autobektoreek osatutako $\mathbb{R}^3$ -ren oinarri ortonormal bat lortu eta eman diagonalaketaren formula:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

APELLIDOS..... NOMBRE..... D.N.I.....

TITULACION..... GRUPO..... FECHA.....

CALIFICACION

--	--	--	--	--	--

1. (a) i. Demuestra que si S y T son subespacios del espacio vectorial E , con sistemas generadores $G_S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ y $G_T = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$ entonces $G_S \cup G_T$ es sistema generador de $S + T$.
 ii. Sean S y T subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{10}$, con $\dim(S) = 2$ y $\dim(T) = 7$. Calcula las posibles dimensiones para los subespacios $S \cap T$ y $S + T$.
- (b) Se definen en el espacio vectorial $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ de las matrices cuadradas reales de orden 2 los siguientes conjuntos:

$$U = \{A \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid A \text{ simétrica}\} \text{ y } V = \{B \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid B \text{ antisimétrica}\}$$

- i. Demuestra que U y V son subespacios vectoriales.
 - ii. Calcula las bases y dimensiones de $U, V, U + V$ y $U \cap V$.
 - iii. Calcula las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de la base de $U + V$ que has obtenido.
2. (a) Demuestra que la aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ es inyectiva si y solo si $\ker(f) = \{\bar{0}\}$.
 - (b) Sea $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Consideramos $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la aplicación lineal que verifica las siguientes propiedades:

$$f(\bar{e}_1) = (0, 1, 2); f(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = (0, -1, 0); f(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3) = (-2, -2, 0)$$

$$\ker(f) = \{(x, y, z, t) \mid x = z = 0; y - z - t = 0\}$$

- i. Calcula la matriz asociada a f .
 - ii. Calcula las bases y dimensiones de $\text{Im } f$ y $\ker f$.
 - iii. Clasifica la aplicación f .
3. (a) Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dos vectores del espacio vectorial euclídeo V . Demuestra:
 - i. $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$
 - ii. $\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 \iff \bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores ortogonales.
 - (b) Se define en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ el siguiente producto escalar:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3$$

- i. Utilizando este producto escalar, calcula una base ortonormal para el subespacio $S = \{(x, y, z) \mid -2x + 2y - z = 0\}$.
 - ii. Completa la base calculada en el apartado anterior hasta conseguir una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
4. (a) i. Dado el endomorfismo $f : E \longrightarrow E$, demuestra que el subconjunto de E formado por los autovectores asociados a un autovalor λ junto con el vector $\bar{0}$, $S = \{\bar{x} \in E - \{\bar{0}\} \mid f(\bar{x}) = \lambda\bar{x}\} \cup \{\bar{0}\}$, es subespacio vectorial.
 ii. Demuestra que si $\bar{x}$ es autovector de la matriz A asociado a un valor propio λ , también es autovector de las matrices A^2 y A^3 . Di cuál es, en cada caso, el autovalor asociado.
 - (b) Obtén una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de la siguiente matriz y da la fórmula de la diagonalización:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$