

APELLIDOS.....NOMBRE.....DNI.....

TITULACIÓN.....GRUPO.....FECHA.....

CALIFICACIÓN

--	--	--	--	--

Razonar **todas las respuestas** utilizando la teoría desarrollada en la asignatura.

1. (a) Demostrar: Si el sistema de vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ es libre, toda combinación lineal de estos vectores tiene expresión única.

- (b) Sea $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices reales de orden 2×3 . Demostrar que uno de los siguientes subconjuntos es subespacio vectorial y que el otro no lo es:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a+b & a \\ c & 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ c & 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

2. (a) Sea $f: V \rightarrow V'$ una aplicación lineal inyectiva. Demostrar que si $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\} \subset V$ es una familia libre, $\{f(\bar{u}_1), \dots, f(\bar{u}_n)\} \subset V'$ también es libre.

- (b) Sean V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$, $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, bases de V y W respectivamente. Sea la aplicación lineal definida de la siguiente manera:

$$f(\bar{e}_1) = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 - 4\bar{u}_3, \quad f(\bar{e}_2) = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - 2\bar{u}_3, \quad f(\bar{e}_3) = 3\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \quad f(\bar{e}_4) = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_3.$$

- Hallar la matriz de f en las bases B y B' .
- Calcular una base de $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ y clasificar la aplicación.

3. (a)

- Definir vectores ortogonales y norma de un vector.
- Sean el espacio vectorial euclídeo $(E, \langle, \rangle)$ y los vectores $\bar{u}, \bar{v} \in E$. Demostrar que se cumple la siguiente propiedad:

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 \Leftrightarrow \bar{u} \perp \bar{v}$$

- (b) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ -1 & x-1 & 1 & 1-x \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calcular el valor de x para que exista A^{-1} .
- Para el caso $x = -2$, calcular A^{-1} .

4. (a) Demostrar que los autovectores asociados a autovalores diferentes son linealmente independientes.

- (b) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{pmatrix},$$

donde $\lambda = 1$ es un autovalor de A y $(1,1,1)$ es un autovector asociado a $\lambda = 1$.

- Hallar α, β, γ .
- En caso de ser diagonalizable, diagonalizar A , dando la matriz de cambio de base correspondiente.

DEITURAK.....IZENA.....N.A.N.....

TITULAZIOA.....TALDEA.....DATA.....

KALIFIKAZIOA

--	--	--	--	--

Erantzun **guztiak arrazoitu** ikusitako teoria erabiliz:

1. (a) Frogatu: $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ bektore-sistema askea bada, bektore hauen konbinazio lineal den edozein bektorek adierazpide bakarra du.

(b) Izan bedi $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, 2×3 ordenako matrize errealeen bektore-espazioa. Frogatu ondorengo bi azpimultzoetako bat azpiespazioa dela eta bestea azpiespazioa ez dela:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a+b & a \\ c & 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ c & 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

2. (a) Izan bedi $f: V \rightarrow V'$ aplikazio lineal injektibo bat. Frogatu $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\} \subset V$ familia askea bada, $\{f(\bar{u}_1), \dots, f(\bar{u}_n)\} \subset V'$ ere askea dela.

(b) Izan bitez V eta W bi bektore-espazio $\mathbb{R}$ -ren gainean eta $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$, $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, V eta W -ren oinarriak hurrenez hurren. Izan bedi honela definitutako aplikazio lineala:

$$f(\bar{e}_1) = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 - 4\bar{u}_3, \quad f(\bar{e}_2) = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - 2\bar{u}_3, \quad f(\bar{e}_3) = 3\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \quad f(\bar{e}_4) = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_3.$$

- Lortu f -ren matrizea B eta B' oinarrietan.
- Kalkulatu $\text{Ker}(f)$ eta $\text{Im}(f)$ -ren oinarri bat eta dimentsioa, eta sailkatu aplikazioa.

3. (a)

- Definitu bektore ortogonalak eta bektore baten norma.
- Izan bitez $(E, \langle, \rangle)$ bektore-espazio euklidearra eta $\bar{u}, \bar{v} \in E$ bektoreak. Frogatu ondorengo propietatea betetzen dela:

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 \Leftrightarrow \bar{u} \perp \bar{v}$$

(b) Izan bedi ondorengo matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ -1 & x-1 & 1 & 1-x \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Kalkulatu x -ren balioak A^{-1} existitu dadin.
- $x = -2$ deneko kasuan, kalkulatu A^{-1} .

4. (a) Frogatu autobalio desberdinei loturiko autobektoreak linealki independenteak direla.

(b) Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{pmatrix},$$

non $\lambda = 1$ A -ren autobalio bat den, eta $(1,1,1)$ $\lambda = 1$ -ri loturiko autobektore bat den.

- Lortu α, β, γ .
- Diagonalgarria bada, diagonalizatu A eta eman dagokion oinarri-aldaketaren matrizea.