

APELLIDOS.....NOMBRE.....DNI.....

TITULACIÓN.....GRUPO.....FECHA.....

CALIFICACIÓN

--	--	--	--	--

Razonar **todas las respuestas** utilizando la teoría desarrollada en la asignatura.

1. (a) Sea el espacio vectorial V y $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una familia libre. Siendo $S_1 = L(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2 + \bar{v}_3\})$ y $S_2 = L(\{\bar{v}_2, \bar{v}_3\})$, hallar una base y la dimensión de los subespacios $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.
- (b) Sea V un espacio vectorial, $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ una base de V , y

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3, \quad \bar{v}_2 = -\bar{u}_2, \quad \bar{v}_3 = \bar{u}_1 - \bar{u}_4, \quad \bar{v}_4 = \bar{u}_1 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4.$$
 - i. Demostrar que $B' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ es otra base de V y dar la matriz de cambio de base.
 - ii. Hallar las coordenadas del vector $\bar{x} = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 - \bar{u}_3$ en la base B' .
 - iii. Si las coordenadas de un vector $\bar{v}$ en la base B' son $(1, -3, 0, 1)$, ¿cuáles son sus coordenadas en la base B ?
2. (a) Sea $f: V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Definir $\text{Ker}(f)$ y demostrar que es subespacio vectorial de V .
- (b) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$, $f(1, 0, 1) = (1, 0, 1)$ y $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y, z = 0\}$.
 - i. Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal.
 - ii. Calcular bases y dimensiones de $\text{Im}(f)$ y $\text{Ker}(f)$. Clasificar la aplicación.
3. (a)
 - i. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tales que $|A| = 10$ y $|B| = 12$. Calcular: $|AB|$, $|A^T|$, $|2B|$, $|A^4|$ y $|B^{-1}|$.
 - ii. Demostrar las siguientes propiedades:
 - ii.a) Sean A y B matrices invertibles. Entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
 - ii.b) Sean A y B matrices invertibles y conmutativas, es decir, $AB = BA$. Entonces:
 - A^{-1} y B son conmutativas.
 - A^{-1} y B^{-1} son conmutativas.
- (b) Sea el subespacio de $\mathbb{R}^3$ $U = L(\{(1, 2, 2), (-1, 0, 2)\})$.
 - i. Encontrar una base ortonormal de U .
 - ii. Completando la base calculada en el apartado anterior, encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
4. (a)
 - i. Definir valor propio y vector propio de un endomorfismo.
 - ii. Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$. Demostrar que si $A^2 = I$, entonces los valores propios de A son $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.
 - iii. Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$ inversible. Si λ es un valor propio de A , demostrar que $1/\lambda$ es valor propio de A^{-1} .
- (b) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 - i. Comprobar que sus polinomios característicos son iguales.
 - ii. ¿Son diagonalizables? En los casos afirmativos, diagonalizar la matriz dando la matriz del cambio de base.

Nota: Los alumnos que sean evaluados mediante prueba final deberán realizar a continuación el examen correspondiente a las prácticas.

DEITURAK.....IZENA.....N.A.N.....

TITULAZIOA.....TALDEA.....DATA.....

KALIFIKAZIOA

--	--	--	--	--

Erantzun **guztiak arrazoitu** ikusitako teoria erabiliz:

- (a) Izan bitez V bektore-espazioa eta $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ familia askea. $S_1 = L(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2 + \bar{v}_3\})$ eta $S_2 = L(\{\bar{v}_2, \bar{v}_3\})$ baldin badira, lortu $S_1 + S_2$ eta $S_1 \cap S_2$ azpiespazioen oinarri bat eta dimentsioa.

(b) Izan bitez V bektore-espazioa, $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ V -ren oinarri bat, eta $\bar{v}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3$, $\bar{v}_2 = -\bar{u}_2$, $\bar{v}_3 = \bar{u}_1 - \bar{u}_4$, $\bar{v}_4 = \bar{u}_1 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4$.

 - Frogatu $B' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ V -ren beste oinarri bat dela, eta eman oinarri-aldaketaren matrizea.
 - Lortu $\bar{x} = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 - \bar{u}_3$ bektorearen koordenatuak B' -n.
 - $\bar{v}$ bektore baten koordenatuak B' -n $(1, -3, 0, 1)$ badira, zeintzuk dira bere koordenatuak B -n?
- (a) Izan bedi $f: V \rightarrow V'$ aplikazio lineal bat. Definitu $\text{Ker}(f)$ eta frogatu V -ren azpiespazioa dela.

(b) Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(0,1,0) = (0,1,1)$, $f(1,0,1) = (1,0,1)$ eta $\text{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y, z = 0\}$ diren.

 - Kalkulatu aplikazio linealari dagokion matrizea.
 - $\text{Im}(f)$ eta $\text{Ker}(f)$ -ren oinarriak eta dimentsioak lortu. Aplikazioa sailkatu.
- (a)

 - Izan bitez $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ non $|A| = 10$ eta $|B| = 12$. Kalkulatu: $|AB|$, $|A^T|$, $|2B|$, $|A^4|$ eta $|B^{-1}|$.
 - Ondorengo baieztapenak frogatu:
 - Izan bitez A eta B matrize alderanzgarriak. Orduan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
 - Izan bitez A eta B matrize alderanzgarriak eta trukakorrak, hau da, $AB = BA$ Orduan:
 - A^{-1} eta B matrizeak trukakorrak dira.
 - A^{-1} eta B^{-1} matrizeak trukakorrak dira.

(b) Izan bedi $U = L(\{(1,2,2), (-1,0,2)\})$ $\mathbb{R}^3$ -ren azpiespazioa.

 - U -ren oinarri ortonormal bat aurkitu.
 - Aurreko atalean lortutako oinarria osatuz lortu $\mathbb{R}^3$ -ren oinarri ortonormal bat.
- (a)

 - Endomorfismo baten autobalioa eta autobektorea definitu.
 - Izan bedi A $n \times n$ ordenako matrize karratua. Frogatu $A^2 = I$ bada, orduan A -ren autobalioak $\lambda = 1$ edo $\lambda = -1$ direla.
 - Izan bedi A $n \times n$ ordenako matrize karratu alderanzgarria. λ A -ren autobalioa bada, frogatu $\frac{1}{\lambda} A^{-1}$ matrizearen autobalioa dela.

(b) Izan bitez ondorengo matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 - Egiaztatu beraien polinomio karakteristikoak berdinak direla.
 - Diagonalgarriak al dira? Baiezko kasuetan matrizea diagonalizatu oinarri-aldaketaren matrizea adieraziz.