

APELLIDOS.....NOMBRE.....DNI.....

 TITULACIÓN.....GRUPO.....FECHA.....

 CALIFICACIÓN

--	--	--	--

Razonar **todas las respuestas** utilizando la teoría desarrollada en la asignatura.

- (a) Sea $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ una familia libre de vectores del espacio vectorial V . Estudiar si los vectores $(2\bar{u} + \lambda\bar{v})$ y $(\lambda\bar{u} + 3\bar{v})$ son linealmente independientes en función del parámetro $\lambda \in K$.

 (b) Sea $S = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / \text{traza}(A) = a_{11} + a_{22} = 0\}$ un subconjunto de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Demostrar que S es subespacio vectorial y hallar una base y la dimensión del subespacio.

- (a) Demostrar que si el núcleo o kernel de una aplicación lineal solo contiene al vector nulo la aplicación lineal es inyectiva.

 (b) Sean $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(\bar{e}_3) = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $f(\bar{e}_3 - 2\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$ y $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \in \text{Ker}(f)$.
 - Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal.
 - Calcular bases y dimensiones de $\text{Im}(f)$ y $\text{Ker}(f)$. Clasificar la aplicación.
 - Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal en la base B' :
 $B' = \{(1, 0, -2), (0, 1, 1), (1, 0, -1)\}$

- (a) Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Demostrar la siguiente igualdad:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 - \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 = 4\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$$

- (b) Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ una base ortonormal del espacio euclídeo $(V, \langle, \rangle)$.

Demuestra que si $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$ e $\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + \dots + y_n\bar{e}_n$, entonces $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$.

- (c) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ -x & x & -1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}$$

- Hallar los valores de x para los que la matriz A es invertible.
 - En caso de ser posible, calcular la inversa de A para $x = 0$.
- (a) Definir los siguientes conceptos: autovalor y autovector de un endomorfismo del espacio vectorial E .

 (b) Sea el siguiente subconjunto del espacio vectorial E :

$$S = \{\bar{x} \in E - \{\bar{0}\} \mid f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}\} \cup \{\bar{0}\}$$
 Demostrar que S es subespacio vectorial de E .

 (c) Estudiar si la matriz A es diagonalizable, y en caso de ser posible, diagonalizarla dando la matriz de cambio de base correspondiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Nota: los alumnos que no hayan superado la parte de prácticas de ordenador deberán realizar a continuación el examen correspondiente.

DEITURAK.....IZENA.....N.A.N.....

 TITULAZIOA.....TALDEA.....DATA.....

 KALIFIKAZIOA

--	--	--	--	--

Galdera hauek erantzun, **erantzun guztiak arrazoituz** ikusitako teoria erabiliz:

- (a) Izan bedi $\{\bar{u}, \bar{v}\}$, V bektore-espazioaren bektore-familia askea. Aztertu $(2\bar{u} + \lambda\bar{v})$ eta $(\lambda\bar{u} + 3\bar{v})$ bektoreak linealki independenteak diren $\lambda \in K$ parametroaren arabera.

(b) Izan bedi $S = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / \text{aztarna}(A) = a_{11} + a_{22} = 0\}$ $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ bektore-espazioko azpimultzoa. Frogatu S azpiespazio bektoriala dela eta lortu azpiespazioaren oinarri bat eta dimentsioa.
- (a) Frogatu aplikazio linealaren huna edo kernela bakarrik bektore nuluaz osatuta badago aplikazio lineala injektiboa dela.

(b) Izan bitez $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri kanonikoa eta $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplikazio lineal bat non $f(\bar{e}_3) = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $f(\bar{e}_3 - 2\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$ eta $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \in \text{Ker}(f)$ diren.

 - Aplikazio linealari dagokion matrizea kalkulatu.
 - $\text{Im}(f)$ eta $\text{Ker}(f)$ -ren oinarriak eta dimentsioak lortu. Aplikazioa sailkatu.
 - Kalkulatu aplikazio linealari dagokion matrizea B' oinarrian:

$$B' = \{(1, 0, -2), (0, 1, 1), (1, 0, -1)\}$$
- (a) Izan bedi $(V, \langle, \rangle)$ bektore-espazio euklidearra. Ondorengo berdintza frogatu:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 - \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 = 4\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$$

(b) Izan bedi $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ $(V, \langle, \rangle)$ espazio euklidearraren oinarri ortonormal bat. Frogatu $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$ eta $\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + \dots + y_n\bar{e}_n$ badira, orduan $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ dela.

(c) Izan bedi hurrengo matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ -x & x & -1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}$$
 - Lortu x -ren balioak A alderantzgarria izan dadin.
 - Posible bada, kalkulatu A -ren alderantzizkoa $x = 0$ denean.
- (a) Definitu ondorengo kontzeptuak: E espazioaren endomorfismo baten autobalioa eta autobektorea.

(b) Izan bedi E -ren ondorengo azpimultzoa:

$$S = \{\bar{x} \in E - \{\bar{0}\} \mid f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}\} \cup \{\bar{0}\}$$

Frogatu S azpimultzoa E -ren azpiespazioa dela.

(c) Aztertu A matrizea diagonalgarria den, eta baiezko kasuan, diagonalizatu dagokion oinarri-aldaketa matrizea emanez:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$