

APELLIDOS.....NOMBRE.....DNI.....

TITULACIÓN.....GRUPO.....FECHA.....

CALIFICACIÓN

--	--	--	--	--

Razonar **todas las respuestas** utilizando la teoría desarrollada en la asignatura.

- Sea V un espacio vectorial y $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V . Sea $\bar{x}$ un vector de V cuyas coordenadas en la base B son $(1,1,1)$. Dar una base de V en la cual las coordenadas de $\bar{x}$ sean $(1,0,0)$.
 - Sean S y T subespacios vectoriales de V . Demostrar que $S + T$ es subespacio vectorial de V .
 - Sea $W = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / A^T = -A\}$ un subconjunto del espacio vectorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Estudiar si W es subespacio vectorial.
- Definir imagen y núcleo o kernel de una aplicación lineal.
 - Sean la aplicación lineal $f: V \rightarrow W$ y $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ una base de V . Demostrar que la familia $\{f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \dots, f(\bar{e}_n)\}$ es un sistema generador de $Im(f)$. ¿Es una base de $Im(f)$? Razona la respuesta.
 - Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

$$\begin{aligned}
 f(\bar{e}_1) &= (1, 1, 1, \alpha) \\
 f(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) &= (2, 2, \alpha + 1, \alpha + 1) \\
 f(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) &= (2, \alpha + 1, 2, \alpha + 1) \\
 f(\bar{e}_1 + \bar{e}_4) &= (\alpha + 1, 2, 2, \alpha + 1)
 \end{aligned}$$
 siendo $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
 - Calcular la matriz asociada a f en la base canónica.
 - Calcular los valores de α para que f sea inyectiva.
 - Calcular bases y dimensiones de $Im(f)$ y $Ker(f)$ para $\alpha = -3$.
- Demostrar las siguientes afirmaciones:
 - Sean A y B dos matrices ortogonales (es decir, $A^{-1} = A^T$ y $B^{-1} = B^T$). Entonces, la matriz AB también es ortogonal.
 - Sea A una matriz ortogonal. Entonces, $|A| = \pm 1$.
 - En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar definido por:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$$
 Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto al producto escalar definido.
- Demostrar la invarianza del polinomio característico.
 - Diagonalizar la matriz A utilizando una matriz de cambio de base ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

DEITURAK.....IZENA.....N.A.N.....

TITULAZIOA.....TALDEA.....DATA.....

KALIFIKAZIOA

--	--	--	--	--

Galdera hauek erantzun, **erantzun guztiak arrazoituz** ikusitako teoria erabiliz:

- Izan bedi V bektore-espazioa eta $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ V -ren oinarri bat. Izan bedi $\bar{x}$, V -ren bektore bat zeinen koordinatuak B oinarrian $(1,1,1)$ diren. Eman V -ren oinarri bat non $\bar{x}$ -ren koordinatuak $(1,0,0)$ diren.
 - Izan bitez S eta T , V -ren azpiespazio bektorialak. Frogatu $S + T$ ere V -ren azpiespazio bektoriala dela.
 - Izan bedi $W = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / A^T = -A\}$ $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ -ko bektore-espazioko azpimultzoa. Aztertu W azpiespazio bektoriala den.
- Definitu aplikazio lineal baten huna edo kernela eta irudia.
 - Izan bitez $f: V \rightarrow W$ aplikazio lineala eta $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ V -ren oinarri bat. Frogatu $\{f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \dots, f(\bar{e}_n)\}$ familia $Im(f)$ -ren sistema sortzailea dela. $Im(f)$ -ren oinarria al da? Erantzuna arrazoitu.
 - Izan bedi $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ aplikazio lineala non:

$$\begin{aligned}
 f(\bar{e}_1) &= (1, 1, 1, \alpha) \\
 f(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) &= (2, 2, \alpha + 1, \alpha + 1) \\
 f(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) &= (2, \alpha + 1, 2, \alpha + 1) \\
 f(\bar{e}_1 + \bar{e}_4) &= (\alpha + 1, 2, 2, \alpha + 1)
 \end{aligned}$$
 $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ $\mathbb{R}^4$ -ko oinarri kanonikoa izanik.
 - Kalkulatu f -ri dagokion matrizea oinarri kanonikoan.
 - Kalkulatu α -ren balioak f injektiboa izan dadin.
 - Kalkulatu $Im(f)$ eta $Ker(f)$ -ren oinarriak eta dimentsioak $\alpha = -3$ denean.
- Frogatu hurrengo baieztapenak:
 - Izan bitez A eta B bi matrize ortogonal (hau da: $A^{-1} = A^T$ eta $B^{-1} = B^T$). Orduan, AB matrizea ere ortogonal da.
 - Izan bedi A matrize ortogonal. Orduan, $|A| = \pm 1$.
 - $\mathbb{R}^3$ bektore-espazioan, biderketa eskalar hau definitzen da:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$$
 Kalkulatu $\mathbb{R}^3$ -ren oinarri ortonormal bat definituriko biderketa eskalarrarekiko.
- Frogatu polinomio karakteristikoaren inbariantza.
 - Ondorengo A matrizea diagonalizatu oinarri-aldaketa matrize ortogonal bat erabiliz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$