

APELLIDOS.....NOMBRE.....DNI.....

TITULACIÓN.....GRUPO.....FECHA.....

CALIFICACIÓN

--	--	--	--	--

Razonar todas las respuestas utilizando la teoría desarrollada en la asignatura.

1. (a) Sea $(V, +, \cdot_K)$ un espacio vectorial tal que $\dim V = n$. Definir base de V y coordenadas de un vector. Demostrar que las coordenadas de un vector son únicas.

- (b) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Demostrar que el siguiente subconjunto es subespacio vectorial de $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$:

$$S = \{M \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) / M \cdot A = O\},$$

donde O es la matriz nula de $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

2. (a) Sea $f: V \rightarrow V$ una aplicación lineal. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- Si f es inyectiva, entonces $\exists \bar{u} \in V, \bar{u} \neq \bar{0}$ tal que $f(\bar{u}) = f(5\bar{u})$.
- Si f es suprayectiva y $\bar{u}, \bar{v} \in V$ son linealmente independientes, entonces $f(\bar{u})$ y $f(\bar{v})$ son linealmente independientes.

- (b) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que cumple las siguientes condiciones:

$$f(0,1,1) = (0,2,2), f(1,0,-1) = (2,0,-4), \quad (-1,1,0) \in \text{Ker}(f)$$

- Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal.
- Calcular bases y dimensiones de $\text{Im}(f)$ y $\text{Ker}(f)$. Clasificar la aplicación.
- Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal en la base $B' = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,2)\}$.

3. (a) Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Demostrar la desigualdad de Minkowsky:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

- (b) Sea la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 0 & x & 0 & -x \end{pmatrix}$$

- Hallar los valores del parámetro x para los que la matriz A es invertible.
- En caso de ser posible, hallar la inversa de A para el valor $x = 1$.

4. (a) Sean el endomorfismo $f: E \rightarrow E$ y el subconjunto de E $V(\lambda) = \{\bar{x} \in E - \{\bar{0}\} / f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}\} \cup \{\bar{0}\}$. Demostrar que $V(\lambda)$ es subespacio vectorial de E .

- (b) Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizar la matriz mediante una matriz de cambio de base ortogonal.

DEITURAK.....IZENA.....N.A.N.....

TITULAZIOA.....TALDEA.....DATA.....

KALIFIKAZIOA

--	--	--	--	--

Erantzun guztiak arrazoitu irakasgaiaren garatutako teoria erabiliz.

- (a) Izan bedi $(V, +, \cdot_K)$ bektore-espazio bat non $\dim V = n$. Definitu V -ren oinarria eta bektore baten koordinatuak. Frogatu bektore baten koordinatuak bakarrik direla.
- (b) Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Frogatu hurrengo azpimultzoa $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ -ren azpiespazio bektoriala dela:

$$S = \{M \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) / M \cdot A = O\},$$

non $O \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ -ren matrize nulua den.

- (a) Izan bedi $f: V \rightarrow V$ aplikazio lineala. Arrazoitu baieztapen hauek zuzenak ala okerrak diren:
 - f injektiboa bada, orduan $\exists \bar{u} \in V, \bar{u} \neq \bar{0}$ non $f(\bar{u}) = f(5\bar{u})$.
 - f supraiektiboa bada eta $\bar{u}, \bar{v} \in V$ linealki independenteak badira, orduan $f(\bar{u})$ eta $f(\bar{v})$ linealki independenteak dira.

- (b) Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ondorengo baldintzak betetzen dituen aplikazio lineala:

$$f(0,1,1) = (0,2,2), f(1,0,-1) = (2,0,-4), \quad (-1,1,0) \in \text{Ker}(f)$$

- Aplikazio linealari dagokion matrizea kalkulatu.
 - $\text{Im}(f)$ eta $\text{Ker}(f)$ -ren oinarriak eta dimentsioak lortu. Aplikazioa sailkatu.
 - Kalkulatu aplikazio linealari dagokion matrizea $B' = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,2)\}$ oinarrian.
- (a) Izan bedi $(V, \langle, \rangle)$ bektore-espazio euklidearra. Minkowsky-ren ezberdintza frogatu:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

- (b) Izan bedi hurrengo matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 0 & x & 0 & -x \end{pmatrix}$$

- Lortu x parametroaren balioak A matrizea alderantzizagarria izan dadin.
 - Posible bada, kalkulatu A -ren alderantzizkoa $x = 1$ baliorako.
- (a) Izan bitez $f: E \rightarrow E$ endomorfismoa eta $V(\lambda) = \{\bar{x} \in E - \{\bar{0}\} / f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}\} \cup \{\bar{0}\}$, E -ren azpimultzoa. Frogatu $V(\lambda)$ E -ren azpiespazio bektoriala dela.
 - (b) Izan bedi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizatu matrizea oinarri-aldaketa matrize ortogonal baten bidez.