

APELLIDOS.....NOMBRE.....DNI.....

TITULACIÓN.....GRUPO.....FECHA.....

CALIFICACIÓN

--	--	--	--	--

Razonar todas las respuestas utilizando la teoría desarrollada en la asignatura.

1. (a) Sean S y T dos subespacios vectoriales del espacio vectorial $(V, +, \cdot_K)$. Definir el subconjunto $S + T$ y demostrar que es un subespacio vectorial de V .

- (b) Sea el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$S(a) = L(\{(1, 0, -2, 0), (-1, 1, a, 1), (1, a, 1, a)\})$$

- Calcular la dimensión de $S(a)$ en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
- Completar una base de $S(0)$ hasta conseguir una base de $\mathbb{R}^4$.
- Si las coordenadas de un vector en la base obtenida de $\mathbb{R}^4$ son $(1, 0, -1, 0)$, ¿cuáles son las coordenadas de dicho vector en la base canónica?

2. (a) Sea $f: V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Demostrar el siguiente teorema:

$$f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\bar{0}\}$$

- (b) Sea $f: V \rightarrow V'$ la aplicación lineal tal que $f(x, y, z) = (x - z, 2x + 4y, -2y + 2z)$ y $V = V' = \mathbb{R}^3$.

- Hallar bases y dimensión de $\text{Im}(f)$ y $\text{Ker}(f)$.
- Clasificar la aplicación lineal.
- Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal en las bases $B_V = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, -1)\}$ y $B_{V'} = \{(0, -2, 2), (-1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$.

3. (a) Se dice que $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ es idempotente si $A^2 = A$. Razonar si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

- A idempotente $\Rightarrow A^3$ idempotente
- A idempotente $\Rightarrow A^T$ idempotente
- A idempotente $\Rightarrow \exists A^{-1}$

- (b) Sea $\mathbb{R}^3$ un espacio vectorial euclídeo con el producto escalar de dos vectores definido como:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de dicho producto escalar.

4. (a) Demostrar la invariancia del polinomio característico.

- (b) Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalizar dicha matriz en caso de ser posible.

DEITURAK.....IZENA.....N.A.N.....

TITULAZIOA.....TALDEA.....DATA.....

KALIFIKAZIOA

--	--	--	--	--

Erantzun guztiak arrazoitu irakasgaian garatutako teoria erabiliz.

1. (a) Izan bitez S eta T $(V, +, \cdot_K)$ bektore-espazioaren bi azpiespazio. Definitu $S + T$ azpimultzoa eta frogatu V -ren azpiespazio bektoriala dela.

(b) Izan bedi hurrengo $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazioa:

$$S(a) = L(\{(1, 0, -2, 0), (-1, 1, a, 1), (1, a, 1, a)\})$$

- Kalkulatu $S(a)$ -ren dimentsioa $a \in \mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera.
- Osatu $S(0)$ -ren oinarri bat $\mathbb{R}^4$ -ko oinarri bat lortu arte.
- Bektore baten koordinatuak $\mathbb{R}^4$ -ko lortutako oinarrian $(1, 0, -1, 0)$ badira, zeintzuk dira bektorearen koordinatuak oinarri kanonikoan?

2. (a) Izan bedi $f: V \rightarrow V'$ aplikazio lineala. Ondorengo teorema frogatu:

$$f \text{ injektiboa} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$$

(b) Izan bedi $f: V \rightarrow V'$ aplikazio lineala, non $f(x, y, z) = (x - z, 2x + 4y, -2y + 2z)$ eta $V = V' = \mathbb{R}^3$.

- Kalkulatu $\text{Im}(f)$ eta $\text{Ker}(f)$ -ren oinarriak eta dimentsioa.
- Aplikazio lineala sailkatu.
- Kalkulatu aplikazio linealari dagokion matrizea $B_V = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, -1)\}$ eta $B_{V'} = \{(0, -2, 2), (-1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$ oinarrietan.

3. (a) $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ idenpotentea deritzo $A^2 = A$ betetzen bada. Arrazoitu ondorengo baldintzak egiazkoak edo faltsuak diren:

- A idenpotente $\Rightarrow A^3$ idenpotente
- A idenpotente $\Rightarrow A^T$ idenpotente
- A idenpotente $\Rightarrow \exists A^{-1}$

(b) Izan bedi $\mathbb{R}^3$ bektore-espazio euklidearra non bi bektoreren arteko biderketa eskalarra honela definitzen den:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Lortu $\mathbb{R}^3$ -ren oinarri ortonormal bat biderketa eskalar honekiko.

4. (a) Frogatu polinomio karakteristikoaren inbariantza.

(b) Izan bedi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalizatu matrizea posible bada.