

APELLIDOS: _____ NOMBRE: _____

DNI: _____ GRADO: _____ GRUPO: _____

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Nota

1. Calcular y representar geométricamente los afijos de los números complejos z que verifican las condiciones siguientes:

$$\begin{cases} |z - 2| \leq 3|z + 2| \\ z - \bar{z} \geq \frac{3}{2}i \end{cases}$$

Competencias evaluadas: COMP 1, COMP2 y COMP4. Evaluación:

COMP 1: 1 punto por reconocer los conceptos a aplicar.

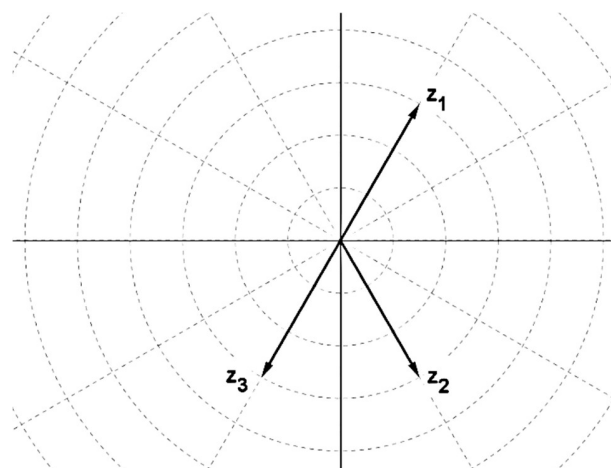
COMP 2: 7 puntos por el cálculo.

COMP 4: 2 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/40

2. Sean z_1, z_2, z_3 los números complejos que se muestran en la figura. Calcular y representar geométricamente los afijos de los números complejos z que verifican la condición:

$$z^4 = 8 \frac{z_1}{z_3} (\bar{z}_2)^2 (-1 + \sqrt{3}i)$$



Competencias evaluadas: COMP 1, COMP2 y COMP4. Evaluación:

COMP 1: 1 punto por reconocer los conceptos a aplicar.

COMP 2: 7 puntos por el cálculo.

COMP 4: 2 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/40

3. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente cuyo límite es L . Supongamos que $\exists b \in \mathbb{R} / a_n > b \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Razonar formalmente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

1. Es posible que $L = b$.
2. Necesariamente $L \geq b$.

Competencias evaluadas: COMP 1, COMP4. Evaluación:
 COMP 1: 1 punto por reconocer los conceptos a aplicar.
 COMP 4: 9 puntos por la demostración.

Puntos: 10/40

4. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos se llama hipergeométrica, si existen números reales

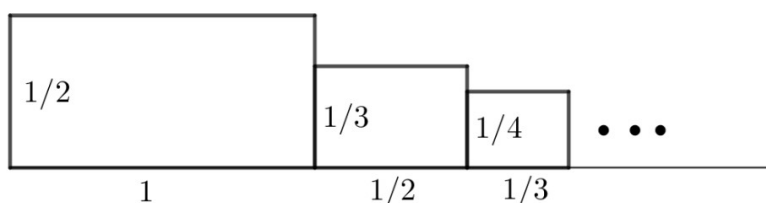
α, β, γ tales que α y γ no son nulos a la vez, y que verifican la condición $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$. Si

$\alpha + \beta < \gamma$, entonces la serie es convergente y su suma es igual al límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{a_n(\alpha n + \beta) - a_1 \gamma}{\alpha + \beta - \gamma} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

a) Empleando el resultado anterior, calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, formamos un rectángulo con base igual a $1/n$ y altura igual a $1/(n+1)$. Colocamos todos esos rectángulos seguidos, como en la figura:



b.1) Si vamos sumando las **longitudes** de las bases, ¿obtenemos una serie convergente? ¿Cuál será su suma?

b.2) Si vamos sumando las **áreas** de estos rectángulos, ¿obtenemos una serie convergente? ¿Cuál será su suma?

Competencias evaluadas: COMP 1, COMP2 y COMP4. Evaluación:
 COMP 1: 2 puntos por reconocer los conceptos a aplicar.
 COMP 2: 6 puntos por el cálculo.

COMP 4: 2 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.).

Puntos: 10/40

 Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea	GIPUZKOAKO INGENIARITZA ESKOLA KALKULUA. LEHENENGO EBALUAZIOA 2025eko urriaren 20a
--	--

ABIZENAK: _____ IZENA: _____

NAN: _____ GRADUA: _____ TALDEA: _____

1. ariketa	2. ariketa	3. ariketa	4. ariketa	Nota

1. Ondorengo baldintzak betetzen dituzten z zenbaki konplexuen afixuen leku geometrikoa kalkulatu eta marraztu:

$$\begin{cases} |z - 2| \leq 3|z + 2| \\ z - \bar{z} \geq \frac{3}{2}i \end{cases}$$

Ebaluatutako gaitasunak: 1. GAIT, 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

1. GAIT: 1 puntu aplikatu behar diren kontzeptuak ezagutzeagatik.
2. GAIT: 7 puntu kalkuluagatik.
4. GAIT: 2 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

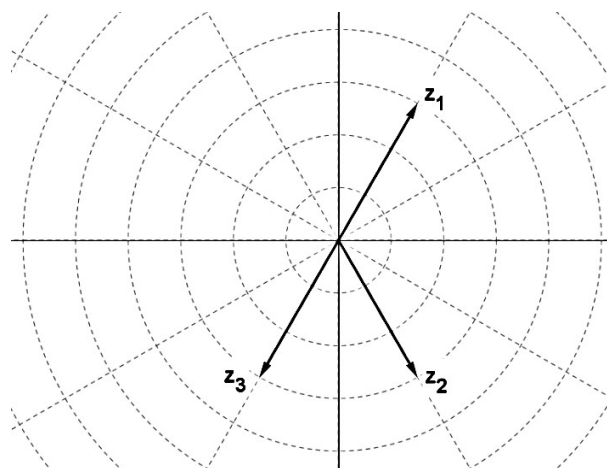
Puntuak: 10/40

2. Izan bitez z_1, z_2, z_3 irudian agertzen diren zenbaki konplexuak. Ondorengo baldintza betetzen duten z zenbaki konplexuen afixuen leku geometrikoa kalkulatu eta marraztu:

$$z^4 = 8 \frac{z_1}{z_3} (\bar{z}_2)^2 (-1 + \sqrt{3}i)$$

Ebaluatutako gaitasunak: 1. GAIT, 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

1. GAIT: 1 puntu aplikatu behar diren kontzeptuak ezagutzeagatik.
2. GAIT: 7 puntu kalkuluagatik.
4. GAIT: 2 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).



Puntuak: 10/40

3. Izan bedi $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ L -rantz jotzen duen segida konbergentea. Demagun $\exists b \in \mathbb{R} / a_n > b \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Arrazoitu, formalki, ondorengo baieztapenak egiazkoak ala faltsuak diren:

1. Posible da $L = b$ izatea.
2. Derrigorrez, $L \geq b$ izan behar du.

Ebaluatutako gaitasunak: 1. GAIT, 4. GAIT. Ebaluazioa:

1. GAIT: 1 puntu aplikatu behar diren kontzeptuak ezagutzeagatik.
4. GAIT: 9 puntu frogapenagatik.

Puntuak: 10/40

4. Gai positiboko $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serieari hipergeometrikoa deritzo baldin eta α, β, γ zenbaki errealak

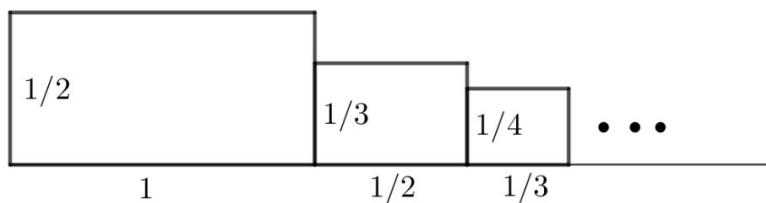
existitzen badira, α eta γ aldi berean nuluak ez direnak, eta $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ baldintza betetzen

dutenak. $\alpha + \beta < \gamma$ bada, seriea konbergentea da eta bere batura ondorengo segidaren limitearen berdina da:

$$\left\{ \frac{a_n(\alpha n + \beta) - a_1 \gamma}{\alpha + \beta - \gamma} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

a) Aurreko emaitza erabiliz, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ batura kalkulatu.

b) $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako laukizuzen bat eraikitzen dugu, bere oinarriaren luzera $1/n$ eta altueraren luzera $1/(n+1)$ izanik. Laukizuzen horiek guztiak bata bestearen segidan kokatzen ditugu, irudian bezala:



b.1) Oinarrien **luzerak** batuz, serie konbergente bat lortuko dugu? Zein izango da bere batura?

b.2) Laukizuzen hauen **azalerak** batuz, serie konbergente bat lortuko dugu? Zein izango da bere batura?

Ebaluatutako gaitasunak: 1. GAIT, 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

1. GAIT: 2 puntu aplikatu behar diren kontzeptuak ezagutzeagatik.
2. GAIT: 6 puntu kalkuluagatik.
4. GAIT: 2 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

Puntuak: 10/40