

	ESCUELA DE INGENIERÍA DE GIPUZKOA CÁLCULO. TERCERA EVALUACIÓN 19 de enero de 2026
---	--

APELLIDOS: _____ NOMBRE: _____

DNI: _____ GRADO: _____ GRUPO: _____

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6	Nota

1. Calcular y representar geoméricamente los afijos de los números complejos z que verifican las condiciones $|z^2| < 2(\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)) \wedge \frac{z + \bar{z}}{2} \geq \operatorname{Im}(z) + 2$.

Competencias evaluadas: COMP2 y COMP4. Evaluación:

COMP 2: 7 puntos por el cálculo.

COMP 4: 3 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/60

2. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos se llama hipergeométrica, si existen números reales α, β, γ

tales que α y γ no son nulos a la vez, y que verifican la condición $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$. Si $\alpha + \beta \geq \gamma$ la serie es divergente; si $\alpha + \beta < \gamma$ la serie es convergente y su suma es igual al límite de la sucesión

$\left\{ \frac{a_n(\alpha n + \beta) - a_1 \gamma}{\alpha + \beta - \gamma} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$. Empleando este resultado:

a) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ es hipergeométrica y convergente, y calcular su suma.

b) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es hipergeométrica y divergente.

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, formamos cilindros circulares con radio de la base igual a $1/n$ y altura igual a n . Si vamos sumando los volúmenes de estos cilindros, ¿obtenemos una serie convergente? ¿Cuál será su suma?

Competencias evaluadas: COMP1, COMP2 y COMP4. Evaluación:

COMP 1: 2 puntos por reconocer los conceptos a aplicar.

COMP 2: 6 puntos por el cálculo.

COMP 4: 2 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/60

3. Se ha lanzado un satélite espacial siguiendo la órbita descrita por la parábola $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{y}{9} = 1$. En un momento dado, se desea que el satélite abandone su órbita y se dirija hacia una estación espacial situada en el punto $P = (3, 1)$. Para ello, el satélite debe salir en la dirección de la recta tangente a la órbita en el punto de salida. Determinar el o los puntos de la órbita desde los cuales el satélite debe salir para que la recta tangente pase por la estación espacial.

Competencias evaluadas: COMP1, COMP2 y COMP4. Evaluación:

COMP 1: 1 punto por reconocer los conceptos a aplicar.

COMP 2: 7 puntos por el cálculo.

COMP 4: 2 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/60

4. Sea $P_2(x) = 2 - (x-1) - 5(x-1)^2$ el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \ln(g^2(x))$ en el punto $x=1$. Estudiar el crecimiento y la concavidad de $g(x)$ en $x=1$ sabiendo que $g(1) > 0$.

Competencias evaluadas: COMP2 y COMP4. Evaluación:

COMP 2: 7 puntos por el cálculo.

COMP 4: 3 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/60

5. Sea D el recinto limitado por la curva $(y-2)^2 = x-1$, la recta tangente a la curva en el punto $P = (2, 3)$ y el eje OX .

a) Dibujar el recinto D .

b) Calcular el área de D .

Competencias evaluadas: COMP2 y COMP4. Evaluación:

COMP 2: 7 puntos por el cálculo.

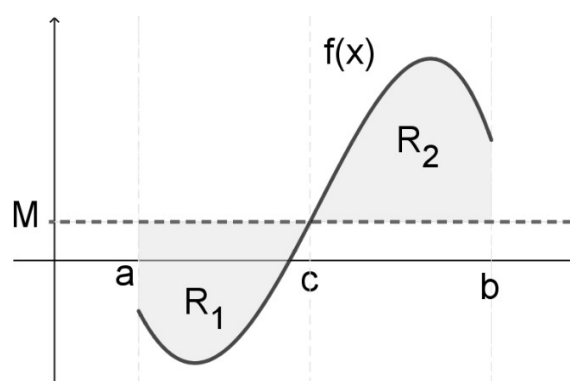
COMP 4: 3 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/60

6. La figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . También se muestra la recta $y = M$, donde M es el valor medio de $f(x)$ en $[a, b]$, y dos regiones sombreadas R_1 y R_2 .

a) Demostrar que las áreas de R_1 y R_2 son iguales.

b) Sean M_{ac} , M_{cb} los valores medios de $f(x)$ en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente. Obtener la relación que existe entre los tres valores M , M_{ac} y M_{cb} .



c) Considerar la función definida por $F(x) = \int_a^x f(u) du$, $a \leq x \leq b$. Estudiar:

c.1. El crecimiento y los extremos de $F(x)$.

c.2. La concavidad y los puntos de inflexión de $F(x)$.

Competencias evaluadas: COMP1, COMP2 y COMP4. Evaluación:

COMP 1: 1 punto por reconocer los conceptos a aplicar.

COMP 2: 7 puntos por el cálculo.

COMP 4: 2 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/60

 Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea	GIPUZKOAKO INGENIARITZA ESKOLA KALKULUA. HIRUGARREN EBALUAZIOA 2026ko urtarrilaren 19a
--	---

ABIZENAK: _____ IZENA: _____

NAN: _____ GRADUA: _____ TALDEA: _____

1. ariketa	2. ariketa	3. ariketa	4. ariketa	5. ariketa	6. ariketa	Nota

1. $|z^2| < 2(\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)) \wedge \frac{z + \bar{z}}{2} \geq \operatorname{Im}(z) + 2$ baldintzak betetzen dituzten z zenbaki konplexuen afixuen leku geometrikoa kalkulatu eta marraztu.

Ebaluatutako gaitasunak: 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

2. GAIT: 7 puntu kalkuluagatik.

4. GAIT: 3 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

Puntuak: 10/60

2. Gai positiboko $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serieari hipergeometrikoa deritzo baldin eta α, β, γ zenbaki errealak existitzen badira, α eta γ aldi berean nuluak ez direnak, eta $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ baldintza betetzen dutenak. $\alpha + \beta \geq \gamma$ bada seriea dibergentea da; $\alpha + \beta < \gamma$ bada, seriea konbergentea da eta bere batura $\left\{ \frac{a_n(\alpha n + \beta) - a_1 \gamma}{\alpha + \beta - \gamma} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ segidaren limitearen berdina da. Emaidza hau erabiliz:

a) Frogatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ seriea hipergeometrikoa eta konbergentea dela. Bere batura kalkulatu.

b) Frogatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ seriea hipergeometrikoa eta dibergentea dela.

c) $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako zilindro zirkular bat eraikitzen dugu, bere oinarriaren erradioa $1/n$ eta altuera n izanik. Zilindro hauen bolumenak batuz, serie konbergente bat lortuko dugu? Zein izango da bere batura?

Ebaluatutako gaitasunak: 1. GAIT, 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

1. GAIT: 2 puntu aplikatu behar diren kontzeptuak ezagutzeagatik.

2. GAIT: 6 puntu kalkuluagatik.

4. GAIT: 2 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

Puntuak: 10/60

3. Satelite espazial bat jaurti da $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{y}{9} = 1$ parabolak deskribatzen duen orbitari jarraituz. Une jakin batean, satelitea bere orbita utzi eta $P = (3,1)$ puntuan kokatutako estazio espazial baterantz abiaraztea nahi da. Horretarako, satelitea, irteera puntutik orbitaren zuzen ukitzailearen norabidean atera behar da. Kalkulatu orbitaren puntua edo puntuak zeintzuetatik satelitea irten behar den zuzen ukitzailea estazio espazialek pasatu dadin.

Ebaluatutako gaitasunak: 1. GAIT, 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

1. GAIT: 1 puntu aplikatu behar diren kontzeptuak ezagutzeagatik.

2. GAIT: 7 puntu kalkuluagatik.

4. GAIT: 2 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

Puntuak: 10/60

4. Izan bedi $P_2(x) = 2 - (x-1) - 5(x-1)^2$ $f(x) = \ln(g^2(x))$ funtzioari dagokion Taylor-en polinomioa $x=1$ puntuan. Aztertu $g(x)$ funtzioaren gorakortasuna eta ahurtasuna $x=1$ puntuan, jakinik $g(1) > 0$ dela.

Ebaluatutako gaitasunak: 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

2. GAIT: 7 puntu kalkuluagatik.

4. GAIT: 3 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

Puntuak: 10/60

5. Izan bedi $D: (y-2)^2 = x-1$ kurbak, kurbaren $P = (2,3)$ puntuko zuzen ukitzaileak eta OX ardatzak mugatutako eremua.

a) D eremua marraztu.

b) D -ren azalera kalkulatu.

Ebaluatutako gaitasunak: 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

2. GAIT: 7 puntu kalkuluagatik.

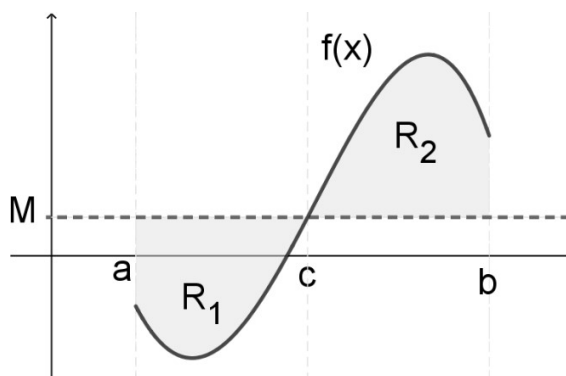
4. GAIT: 3 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

Puntuak: 10/60

6. Irudian $[a,b]$ tartean jarraitua eta (a,b) tartean deribagarria den $f(x)$ funtzioaren grafikoa erakusten da. Irudian bertan $y=M$ zuzena marraztuta dago non M $[a,b]$ tarteko $f(x)$ funtzioaren batez bestekoa den. R_1 eta R_2 itzaleztatutako eremuak dira.

a) Frogatu R_1 eta R_2 -ren azalerak berdinak direla.

b) Izan bitez M_{ac} , M_{cb} $f(x)$ -ren batez besteko balioak $[a,c]$ eta $[c,b]$ tarteetan hurrenez hurren. Lortu M , M_{ac} eta M_{cb} balioen arteko erlazioa.



c) Izan bedi $F(x) = \int_a^x f(u) du$, $a \leq x \leq b$ eran definitutako funtzioa. Aztertu:

c.1. $F(x)$ -ren gorakortasuna eta muturrak.

c.2. $F(x)$ -ren ahurtasuna eta inflexio-puntuak.

Ebaluatutako gaitasunak: 1. GAIT, 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

1. GAIT: 1 puntu aplikatu behar diren kontzeptuak ezagutzeagatik.

2. GAIT: 7 puntu kalkuluagatik.

4. GAIT: 2 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

Puntuak: 10/60