



GIPUZKOAKO
INGENIARITZA
ESKOLA
ESCUELA
DE INGENIERÍA
DE GIPUZKOA

ESCUELA DE INGENIERÍA DE GIPUZKOA

CÁLCULO. CUARTA EVALUACIÓN

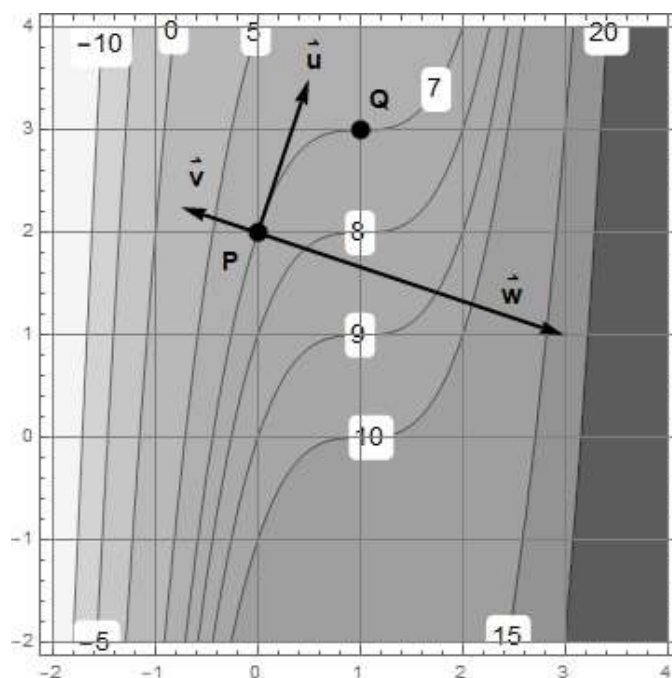
23 de marzo de 2026

APELLIDOS: _____ NOMBRE: _____

DNI: _____ GRADO: _____ GRUPO: _____

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Nota

1. Sea $z = f(x, y)$ la función que modeliza la altura de parte de la superficie de la montaña Mauna Kea en Hawai. Para cada (x, y) , $z = f(x, y)$ representa la altura (m) sobre el nivel del mar de dicho punto de la superficie. En la siguiente imagen se han representado diferentes curvas de nivel de f , un punto P sobre la superficie y tres vectores u, v, w desde P .



- a) Identifica entre los vectores u , v y w el vector gradiente en P . Razona tu respuesta.
b) Identifica cuál de las siguientes curvas corresponde a la curva de nivel de P . Razona tu respuesta.

A. $(x-1)^3 - y^2 = -5$ B. $3x + y = 3$ C. $(x-1)^3 - y = -3$

- c) ¿En qué altura se encuentra el punto P ?
d) Si nos desplazamos desde el punto P siguiendo las direcciones u , v y w , ¿cuál será la velocidad de cambio de la altura en cada una de esas direcciones?
e) La recta tangente a la curva de nivel en el punto Q es paralela a la recta $y = 0$. Sabiendo que el valor máximo de la velocidad de cambio de la altura en ese punto es 1, calcula el vector gradiente en el punto Q .

f) Supongamos que en un punto R el gradiente es nulo. ¿Qué interpretación geométrica podríamos dar sobre dicho punto R en este contexto de la montaña?

Competencias evaluadas: COMP1, COMP2 y COMP4. Evaluación:

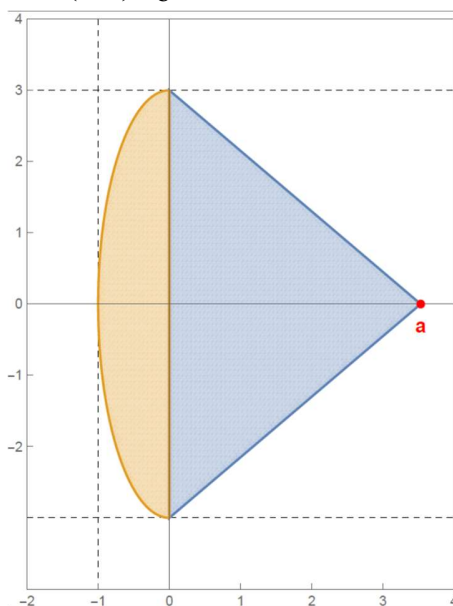
COMP 1: 1 punto por reconocer los conceptos a aplicar.

COMP 2: 7 puntos por el cálculo.

COMP 4: 2 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/30

2. Se construye una pieza con dos materiales. La parte de la elipse está construida con aluminio y la triangular con PVC. La densidad del aluminio es el doble que la del PVC. Queremos que el centro de masa de la pieza esté en $(0,0)$. ¿Cuál debe ser el valor de $a > 0$?



Competencias evaluadas: COMP2 y COMP4. Evaluación:

COMP 2: 7 puntos por el cálculo.

COMP 4: 3 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/30

3. La siguiente integral representa la masa de un sólido S :

$$M_S = \int_{-3}^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \left(\int_{x^2+y^2-12}^{-\sqrt{x^2+y^2}} x \, dz \right) dx \right) dy$$

a) Dibujar el sólido.

b) Calcular la masa.

Competencias evaluadas: COMP2 y COMP4. Evaluación:

COMP 2: 7 puntos por el cálculo.

COMP 4: 3 puntos por la explicación formal (incluyendo enunciados, definiciones, gráficos aclaratorios, hipótesis necesarias, etc.)

Puntos: 10/30

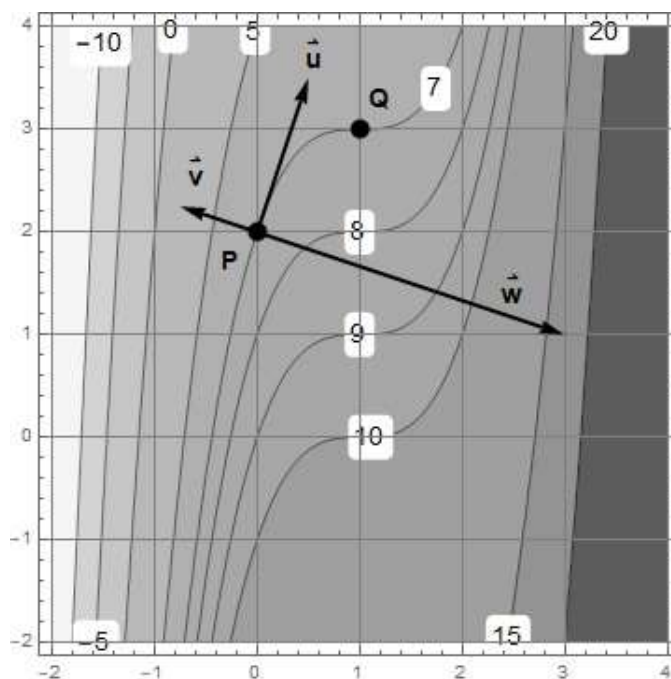


ABIZENAK: _____ IZENA: _____

NAN: _____ GRADUA: _____ TALDEA: _____

1. ariketa	2. ariketa	3. ariketa	Nota

1. Izan bedi $z = f(x, y)$ Hawaiiko Mauna Kea mendi-gainazalaren zati baten altuera modelizatzen duen funtzioa. (x, y) bakoitzerako, $z = f(x, y)$ funtzioak gainazalaren puntu horren itsas mailaren gaineko altuera (m) adierazten du. Ondorengo irudian f -ren maila-kurba batzuk, gainazalaren gaineko P puntu bat eta P puntutik abiatzen diren u , v , w hiru bektore irudikatu dira.



- a) Identifikatu u , v eta w bektoreen artean P puntuko gradiente-bektorea. Erantzuna arrazoitu.
b) Identifikatu ondorengo kurben artean zein dagokion P puntuaren maila-kurbari. Erantzuna arrazoitu.

A. $(x-1)^3 - y^2 = -5$ B. $3x + y = 3$ C. $(x-1)^3 - y = -3$

- c) Zein altueran dago P puntua?
d) P puntutik abiatzen bagara u , v eta w norabideak jarraituz, zein izango da altueraren aldaketa-abiadura norabide bakoitzean?
e) Q puntuko maila-kurbarekiko zuzen ukitzaila $y = 0$ zuzenarekiko paraleloa da. Jakinik altueraren aldaketa-abiaduraren balio maximoa 1 dela, kalkulatu Q puntuko gradiente-bektorea.

f) Demagun gradientea nulua dela R puntu batean. Mendiaren testuinguruan zein interpretazio geometrikoa eman genezake R puntu horri buruz?

Ebaluatutako gaitasunak: 1. GAIT, 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

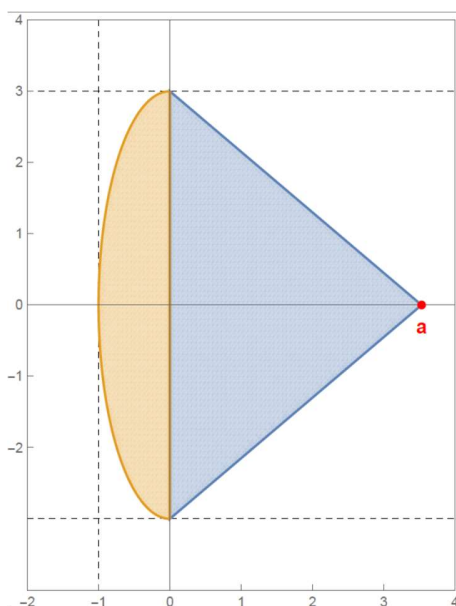
1. GAIT: 1 puntu aplikatu behar diren kontzeptuak ezagutzeagatik.

2. GAIT: 7 puntu kalkuluagatik.

4. GAIT: 2 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

Puntuak: 10/30

2. Pieza bat eraikitzen da bi materialekin. Elipsearen zatia aluminioz eraiki da eta zati triangeluarra PVC-z. Aluminioaren dentsitatea PVC-ren dentsitatearen bikoitza da. Nahi dugu piezaren masa-zentroa $(0,0)$ puntuan egotea. Zein izan behar da $a > 0$ balioa?



Ebaluatutako gaitasunak: 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

diren kontzeptuak ezagutzeagatik.

2. GAIT: 7 puntu kalkuluagatik.

4. GAIT: 3 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

Puntuak: 10/30

3. Ondorengo integralak S solido baten masa adierazten du:

$$M_S = \int_{-3}^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \left(\int_{x^2+y^2-12}^{-x^2-y^2} x \, dz \right) dx \right) dy$$

a) Solidoa marraztu.

b) Masa kalkulatu.

Ebaluatutako gaitasunak: 2. GAIT eta 4. GAIT. Ebaluazioa:

2. GAIT: 7 puntu kalkuluagatik.

4. GAIT: 3 puntu azalpen formalagatik (enuntziatuak, definizioak, grafikoak, hipotesiak, eta abar).

Puntuak: 10/30